

HAUPTACHSENTTRANSFORMATION

Ein wichtiges Handwerkszeug des Physikers ist die Hauptachsentransformation. Diese ist immer dann sinnvoll, wenn bei einem physikalischen System ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Größen besteht, z.B. zwischen Kräften und Auslenkungen, oder zwischen Winkelgeschwindigkeiten und Drehimpulsen. Mit der Hauptachsentransformation betrachtet man das System in einer ausgezeichneten Basis, in der dieser lineare Zusammenhang besonders einfach wird, nämlich unabhängig für jede der Koordinatenachsen. Das sind die Hauptachsen.

[P17] *Gekoppelte Federn*

Auf ein Teilchen wirken verschiedene Federkräfte, so dass die Gesamtkraft linear in der Auslenkung \vec{x} vom Ursprung ist, $\vec{F} = -\kappa M \vec{x}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die drei Richtungen $\pm\vec{n}_1$, $\pm\vec{n}_2$ und $\pm\vec{n}_3$, $(\vec{n}_i)^2 = 1$, in denen die Kraft in Gegenrichtung der Auslenkung wirkt. Bestimmen Sie weiter die zu diesen Richtungen gehörenden Federkonstanten. Was sind die Winkel zwischen diesen Richtungen?

[P18] *Trägheitstensor*

Der Trägheitstensor eines starren Körpers habe die Komponenten $\Theta_{11} = \Theta_{22} = a$, $\Theta_{12} = \Theta_{21} = b$ und $\Theta_{33} = c$, die restlichen Komponenten seien null. Der Trägheitstensor vermittelt den Zusammenhang der Komponenten L_i des Drehimpulses mit den Komponenten ω_j der Winkelgeschwindigkeit,

$$L_i = \Theta_{ij} \omega_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Bestimmen Sie die Richtungen, in denen der Drehimpuls parallel zur Winkelgeschwindigkeit ist, und geben Sie für jede dieser Richtungen den Faktor – das Trägheitsmoment – an, mit dem der Drehimpuls der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.